

# Modelagem da Perda de Umidade da Banana durante o Processo de Secagem

J. P. Wojeicchowski <sup>\*1</sup>, A.P. Ramos, <sup>2</sup>, J.S. Sousa <sup>1</sup>, L.G Maciel <sup>1</sup> e M.M.Pariona <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brasil

<sup>2</sup> Universidade Peruana Unión, Juliaca, Peru

\* Autor correspondente: josepw@hotmail.com

**Resumo:** A secagem, que envolve transferência simultânea de massa e calor, é uma prática comum na indústria de alimentos que visa a diminuição da quantidade de água do produto. O objetivo deste trabalho foi modelar a perda de umidade de bananas Caturra com os modelos empíricos e com o software COMSOL, definindo os coeficientes convectivo de transferência de massa e difusivo. O valor obtido para coeficiente de difusão, com base no ajuste matemático da 2ª Lei de Fick para cilindros foi de  $1,89 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>/s. O valor do coeficiente convectivo de transferência de massa foi de  $1,25 \cdot 10^{-7}$  m/s. Com exceção do modelo de Peleg, os demais modelos empíricos avaliados (Page, Lewis, Weibull e Henderson-Pabis), resultaram nos maiores R<sup>2</sup> e menores erros. Os dados do COMSOL apresentaram comportamento e ajuste muito semelhante ao do modelo de Fick, com um R<sup>2</sup> de 0,88. Considerando as aproximações feitas o resultado obtido pode ser considerado satisfatório.

**Palavras-chave:** Desidratação, umidade, modelagem, simulação.

## 1. Introdução

A secagem é um processo de remoção de umidade de um produto, através da evaporação da água livre contida no mesmo, podendo ser essa remoção por uma fonte de aquecimento (McCORMICK et al., 1983).

Nos processos que envolvem a utilização de ar quente, ocorre transferência de calor do ar para o produto, uma vez que existe um gradiente de temperatura. Ao mesmo tempo, há transferência de massa para o ar na forma de vapor de água (PIAIA, 2009). Esse fenômeno é regido pela 2ª Lei de Fick em regime não estacionário, ao passo que a Lei de Fourier está relacionada à transferência de calor. Há outros modelos, do tipo empíricos, que podem ser usados para prever o comportamento da perda de umidade em função do tempo, como o de Peleg, Page, Lewis etc.

De qualquer modo, a modelagem matemática é de extrema importância na predição e simulação de processos (BOTELHO et al, 2008).

O objetivo deste trabalho foi modelar a perda de umidade durante a secagem de bananas, por meio dos modelos de Peleg, Page, Lewis, Henderson-Pabis, Weibull, Fick e simular utilizando o programa COMSOL Multiphysics ®

## 2. Materiais e métodos

Este trabalho foi realizado no Laboratório de Raízes e Tubérculos do Centro de Tecnologia Agroalimentar (CTA), vinculado ao Departamento de Engenharia de Alimentos da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

### 2.1 Secagem das Bananas

As bananas do tipo Caturra (13 cm de comprimento médio, 3,8 cm de diâmetro médio, umidade inicial em base seca de 1,37) foram adquiridas de um mercado da cidade de Ponta Grossa-PR. Elas foram descascadas e pesadas em uma bandeja de alumínio e dispostas dentro da estufa. As secagens foram conduzidas em uma estufa TE-394/2 (TECNAL, Piracicaba, São Paulo, Brasil) com circulação de ar a 60°C e velocidade do ar 1,6 m/s.

### 2.1 Determinação da umidade

A análise de umidade foi conduzida em uma balança de infravermelho MA 35 (SARTORIUS, Alemanha) à 105 °C por 15 minutos, com uma massa amostral de 0,5 g. O resultado foi expresso em % de umidade em base úmida e posteriormente convertido para base seca por meio da equação abaixo:

$$U_{bs} = \frac{U_{bu}}{(1 - U_{bu})}$$

Em que:

$U_{bu}$  é a umidade em base úmida.

$U_{bs}$  é a umidade em base seca.

Para os cálculos no COMSOL, todos os dados de umidade foram convertidos para Concentração molar de água, dada em mol/m<sup>3</sup>, pela equação abaixo:

$$C = \frac{U \cdot \rho_{banana}}{PM_{\text{água}}}$$

## 2.1 Modelagem da operação de secagem

Os modelos utilizados para avaliar a perda de umidade durante a secagem, encontram-se na Tabela 1.

**Tabela 1:** Modelos utilizados neste trabalho

Modelo	Equação
Peleg (1988)	$U_t = U_0 - \frac{t}{K_1 + K_2 \cdot t}$
Page (1949)	$RU = e^{-K \cdot t^n}$
Lewis (LUI et al, 1997)	$RU = e^{-K \cdot t}$
H. Pabis (RAHMAN et al, 1998)	$RU = A \cdot e^{-K \cdot t}$
Weibull (CORZO et al, 2009)	$RU = e^{-\left[\frac{t}{B}\right]^A}$
Fick (BROOKER et al, 1992)	$RU = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\lambda_n^2} e^{\left(\frac{-\lambda_n^2 \cdot D_{ef} t}{r^2}\right)}$

Em que:  $U_t$  é a umidade no tempo;  $U_0$  é a umidade inicial;  $U_{eq}$  é a umidade de equilíbrio;  $K_1, K_2, K, A, B$  e  $n$  são parâmetros dos modelos;  $t$  é o tempo;  $D_{ef}$  é o coeficiente difusivo;  $r^2$  é o raio ao quadrado,  $\lambda_n^2$  raízes ao quadrado da função de Bessel de ordem zero e  $RU$  é a razão de umidade dada por  $RU = \frac{U_t - U_{eq}}{U_0 - U_{eq}}$ .

A determinação do coeficiente efetivo de difusão foi realizado usando o Solver do Excel, com base no ajuste matemático da solução analítica da segunda Lei de Fick para cilindros, considerando a geometria teórica de um cilindro infinito, desconsiderando as variações de volume das bananas.

As equações dos modelos acima foram dispostas em planilhas do Excel, permitindo que fosse calculado a umidade teórica em função do tempo. Para o ajuste dos parâmetros dos modelos,

os dados teóricos foram comparados com os pontos experimentais, obtendo assim um erro. O somatório dos erros em cada ponto avaliado foi inserido como função objetivo no Solver para determinação de um melhor ajuste. Assim, para cada modelo foram obtidos os parâmetros ajustados que resultaram em melhores coeficiente de correlação e determinação.

## 3. Uso do COMSOL Multiphysics

Como já introduzido o fenômeno da secagem pode ser descrito matematicamente pela Equação de Fourier:

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p u \cdot \nabla T = \nabla(k \nabla T) + Q$$

e pela Segunda Lei de Fick:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla(-D_i \nabla C_i) + u \cdot \nabla C_i = R_i$$

Partindo-se do pressuposto que as frutas permanecem imóveis dentro da estufa, possuem forma cilíndrica, que não há geração de calor ou massa nem consumo de massa e que não há movimento convectivo da água no interior da fruta, podemos simplificar termos chegando a:

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T)$$

e

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \nabla(-D_i \nabla C_i) = 0$$

Para as condições de contorno de transferência de calor e massa foram considerados fluxo nulo na região de simetria e condição convectiva na superfície do produto, conforme equações abaixo.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0, t \geq 0$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = h(T_R - T_{int}), t \geq 0$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right)_{r=0} = 0, t \geq 0,$$

$$D \left. \frac{\partial C}{\partial r} \right)_{r=R} = h_m(C_e - C), t \geq 0$$

Em que  $K$  é a condutividade térmica,  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção,  $T_R$  é a temperatura na superfície do produto,  $T_{int}$  é a temperatura de secagem,  $C_e$  é a concentração de umidade de equilíbrio [ $\text{mol}/\text{m}^3$ ] e  $h_m$  é o coeficiente de transferência de massa por convecção [ $\text{m}/\text{s}$ ].

As condições iniciais para a temperatura e concentração de água no produto, estão representadas pelas expressões seguintes:

$T(r, \phi, z, t) = T_0$  em  $t = t_0$ ,  $r \in [0, R]$ ,  $z \in [0, Z]$ ,  $\phi \in [0^\circ, 180^\circ]$ , em que  $T_0$  é a temperatura inicial do produto e  $t_0$  o tempo inicial.

$C(r, \phi, z, t) = C_0$  em  $t = t_0$ ,  $r \in [0, R]$ ,  $z \in [0, Z]$ ,  $\phi \in [0^\circ, 180^\circ]$ , em que  $C_0$  é a concentração de umidade inicial no produto.

O fluxo de calor foi dado pela equação abaixo,

$$q_0 = h \cdot (T_{ext} - T)$$

Em que  $T_{ext}$  é a temperatura do ar durante a secagem e  $h$ , o coeficiente de transferência de calor. No software a opção selecionada para a condição convectiva foi “Inward Heat Flux”.

Os valores utilizados para condutividade térmica, densidade e calor específico do material, foram os especificados nos parâmetros, conforme a Tabela 2.

Aplicou-se a condição difusiva para todo o domínio, bem como foi especificado o coeficiente difusivo ( $D_{ef}$ ), conforme nomenclatura nos parâmetros inseridos nas Definições globais.

A simulação foi conduzida no software, de 0 a 40800 segundos, com intervalos de cálculo de 60 segundos, a partir de uma malha, inicialmente, Extra-fina.

Demais dados necessários para a resolução do problema, tais como propriedades do ar e da fruta, estão descritos na Tabela 2.

**Tabela 2:** Parâmetros de entrada para a simulação da secagem

Dado	Descrição	Valor
Ueq (g/g)	Umidade de equilíbrio b.s	0,350
h (W/m <sup>2</sup> ·K)	Coef. De transferência de calor por convecção	10,746

hm (m/s)	Coef. De transferência de massa por convecção	1,25.10 <sup>-7</sup>
kb (W/mK)	Condutividade térmica da banana	0,530
$\rho_{banana}$ (kg/m <sup>3</sup> )	Densidade da banana	1006,300
Cpb (J/kgK)	Calor específico da banana	2484,040
D (m <sup>2</sup> /s)	Coeficiente difusivo	1,890.10 <sup>-9</sup>
var (m/s)	Velocidade do ar	1,600
kar (W/mK)	Condutividade térmica do ar	0,030
$\rho_{ar}$ (kg/m <sup>3</sup> )	Densidade do ar	1,060
Cpar (J/kgK)	Calor específico do ar	1007,000
$\mu_{ar}$ (Pa.s)	Viscosidade do ar	2,010.10 <sup>-5</sup>
PMágua (g/mol)	Peso molecular da água	18,000

#### 4. Resultados e Discussão

A difusividade de massa é uma das mais importantes propriedades de transporte em função da aplicação em projetos e otimização de processos de transferência de massa, como em secagens (LIMA et al, 2000). Neste trabalho o valor determinado para a Banana caturra, dada as condições do experimento, foi de  $1,89 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ . Esse valor encontrado foi próximo ao obtido por Queiroz et al (2001) em condições semelhantes,  $1,85 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ .

A Tabela 3 traz os Coeficientes de determinação e correlação absoluta entre a umidade em função do tempo, para cada modelo, além do somatório do erro. O erro calculado é a soma da diferença absoluta entre cada ponto experimental e o seu correspondente teórico.

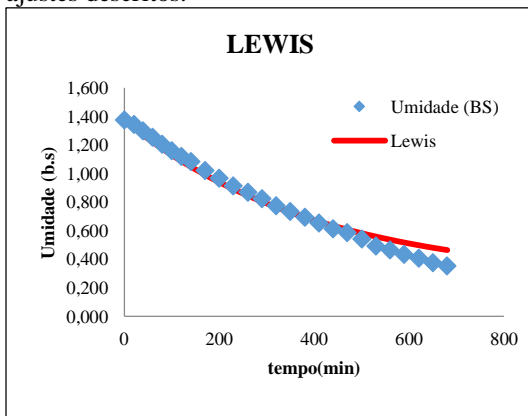
**Tabela 3:** Comparação dos coeficientes de determinação e de Pearson e soma do erro para os diversos modelos utilizados.

Modelo	Determinação (R <sup>2</sup> )	Pearson (r)	Erro
Peleg	0,62	0,79	4,64
Page	0,97	0,98	0,407
Lewis	0,95	0,97	0,962

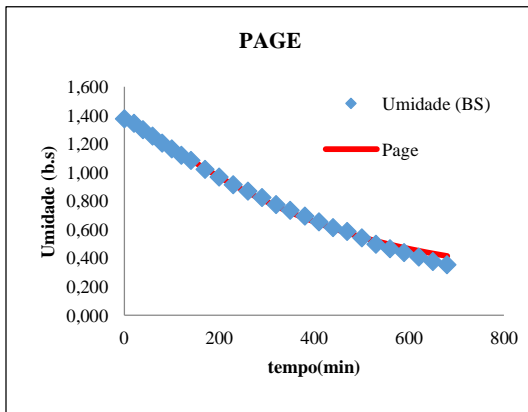
H.Pabis	0,95	0,97	0,740
Weibull	0,97	0,98	0,406
Fick	0,88	0,94	2,85
COMSOL	0,84	0,91	3,54

Nota-se que os modelos empíricos, com exceção ao modelo de Peleg, apresentaram um excelente ajuste ao processo experimental. O modelo de Fick apresentou um comportamento semelhante aos dados obtidos pelo COMSOL, cuja simulação, neste estudo, baseou-se também na 2ª Lei de Fick.

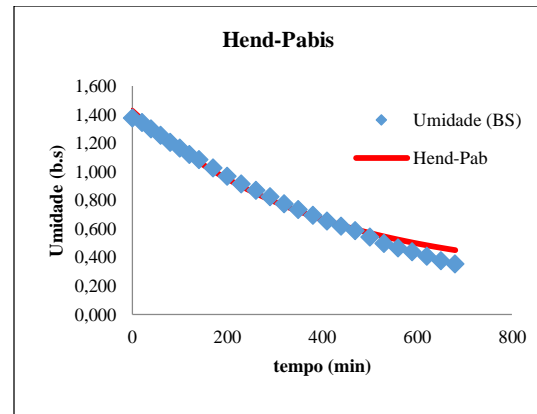
As Figuras 1 a 5 ilustram graficamente os ajustes descritos.



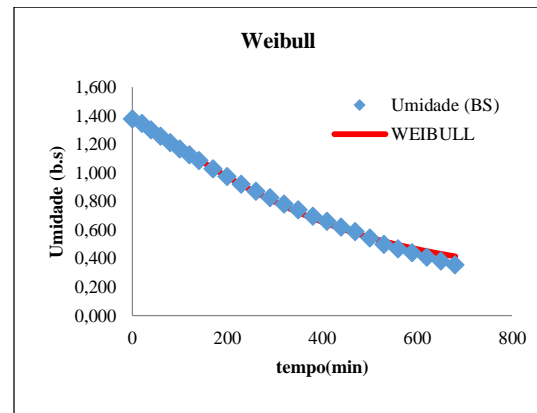
**Figura 1.** Modelo de Lewis em comparação com os dados experimentais.



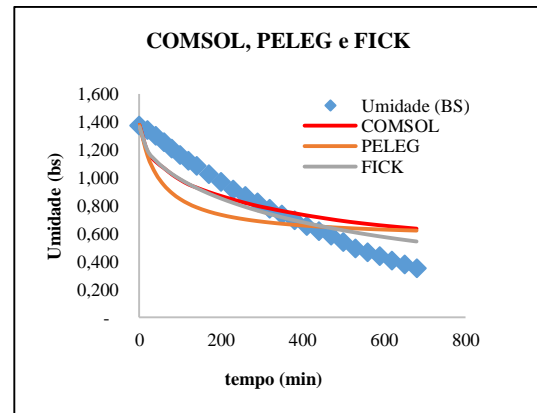
**Figura 2.** Modelo de Page em comparação com os dados experimentais.



**Figura 3.** Modelo de Henderson-Pabis em comparação com os dados experimentais.



**Figura 4.** Modelo de Weibull em comparação com os dados experimentais.



**Figura 5.** Modelo de Peleg, Fick e COMSOL

Comparado aos demais modelos, os resultados obtidos pelo software não apresentaram um ajuste tão fino, Figura 5. Entretanto, pelo número de aproximações feitas, o resultado obtido pode ser considerado

satisfatório e inserindo equações para variação de calor específico, volume e outros parâmetros, o ajuste certamente melhoraria. A alteração do refino da malha não influenciou os dados obtidos, de modo que poderia ser usada uma malha mais grosseira.

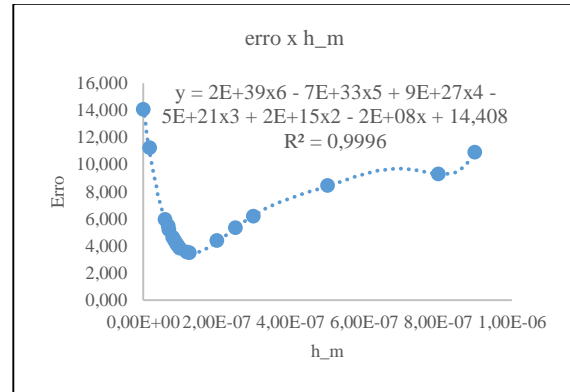
Uma variável que dificultou o ajuste no COMSOL foi o coeficiente convectivo de transferência de massa ( $h$ ), dado em m/s. Valores muito pequenos, da ordem da  $10^{-8}$ , ou grandes, da ordem  $10^{-7}$ , resultaram em um erro alto, mesmo em alguns casos apresentando  $R^2$  expressivo.

Portanto, foram realizadas 18 simulações no COMSOL variando este parâmetro. A cada corrida, os dados da umidade e tempo foram exportados para o Excel. Foi possível plotar um gráfico, relacionando “erro x coeficiente convectivo de transferência de massa”. Com o ajuste para um polinômio, conseguiu-se determinar qual o valor da variável que resultaria em um menor erro. Na Tabela 4 percebe-se que a região que resulta em menor erro é para um valor baixo na ordem de  $10^{-7}$ . Os valores negativos indicam uma correlação negativa, pois os dados representam a relação entre o tempo e a umidade, ou seja, como o aumento do tempo a umidade decresce.

**Tabela 4:** Valores de  $h_m$  e sua influência no  $R^2$ , coeficiente de Pearson e erro.

$h_m$	$R^2$	Pearson	Erro
9,00E-07	0,16	- 0,41	10,91
8,00E-07	0,29	- 0,54	9,31
5,00E-07	0,45	- 0,67	8,42
3,00E-07	0,63	- 0,79	6,18
2,50E-07	0,69	- 0,83	5,31
2,00E-07	0,84	- 0,91	4,39
1,25E-07	0,91	- 0,95	3,50
1,19E-07	0,84	- 0,92	3,55
1,00E-07	0,75	- 0,87	3,84
9,50E-08	0,87	- 0,93	4,00
9,00E-08	0,91	- 0,95	4,17
8,51E-08	0,86	- 0,93	4,38
8,00E-08	0,89	- 0,94	4,61
7,00E-08	0,90	- 0,95	5,20
6,75E-08	0,95	- 0,98	5,48

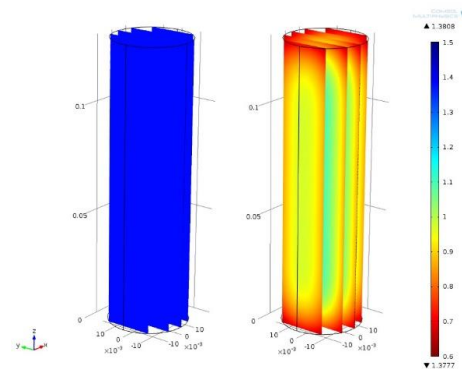
6,00E-08	0,94	-	0,97	5,94
1,71E-08	0,88	-	0,94	11,23
1,14E-09	0,96	-	0,98	14,05



**Figura 6.** Regressão dos dados de  $h_m$  x erro

A Figura 6 mostra o ajuste polinomial de ordem 6 feito para obter o valor do coeficiente convectivo de transferência de massa, que resultasse em um erro baixo. Após iterações usando o Solver do Excel, chegou-se ao valor de  $1,25 \cdot 10^{-7}$  m/s, correspondente à melhor resposta dentre as combinações avaliadas.

O gráfico 3D do perfil da umidade em função do tempo de secagem é mostrado na Figura 6. Nota-se, que no início da secagem há uma saturação de água no produto, já no final do processo, próximo à umidade de equilíbrio, a concentração de água é bem reduzida. Como o fenômeno se dá das extremidades para o centro, essa região é a que mais demora a entrar em equilíbrio, por isso, percebe-se regiões características claras (úmidas) na porção interior da banana.



**Figura 6.** Perfil de umidade da banana no tempo inicial e final de secagem

## 5. Conclusão

O coeficiente de determinação dos dados da umidade obtidos pelo COMSOL em função do tempo foi de 0,84, atrelado a um erro absoluto baixo (valor teórico - valor calculado) dentre as 15 simulações efetuadas variando o coeficiente convectivo de transferência de massa. O ajuste feito utilizando a segunda Lei de Fick para cilindros resultou num coeficiente de correlação 0,88 próximo ao obtido com os dados do COMSOL, que tem também faz o uso deste modelo. O Coeficiente convectivo de transferência de massa e o Coeficiente difusivo obtidos foram, respectivamente  $1,25 \cdot 10^{-7}$  m/s e  $1,89 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>/s . Considerando as aproximações feitas, adaptação da forma geométrica e propriedades como volume, densidade e calor específico sendo considerados constantes, o resultado obtido com a validação pode ser considerado satisfatório e o COMSOL mostrou-se uma ferramenta poderosa na avaliação do fenômeno estudado.

## 8. Referências

1. McCORMICK, P.Y.; PORTER, H.F.; LUCAS, R.L.; WELLS, D.F. Solids drying fundamentals. In: PERRY, R.H. and CHILTON, C.H. *Chemical engineer's handbook*. McGraw Hill Book Company, 1983.
2. PIAIA J.C.Z, Secagem da linguiça calabresa: Experimentação e modelagem 3D aplicadas a fornos industriais, *Tese Doutorado*, 125 (2009)
3. BOTELHO, F.M; CORRÊA, P.C.; GONELI, A.L.D.; MARTINS, M.A E BAPTETINI, F.M. Análise da hidratação do arroz na parboilização, *Ciência e Tecnologia de Alimentos*, **30**, 713-718 (2010).
4. PELEG, M., An empirical model for the description of moisture sorption curves, *Journal of Food Science*, **53**, 1216-1219 (1988)
5. PAGE, G.E, Factors influencing the maximum rates of air drying shelled corn in thin layers, *Tese Mestrado*, (1949)
6. LUI, Q; BAKKER-ARKEMA, . Stochastic modelling of grain drying. Part 2: Model development, *J. Agricult. Eng.*, **66**, 275-280 (1997)
7. RAHMAN, M.S; PERERA, C.O; THEUBAUD, C, Desorption isotherm and heat pump drying kinetics of peas, *Food Research International* ,**30**, 485-491 (1998)
8. CORZO, O.; BRACHO, N, Aplicación del modelo de Weibull normalizado en la deshidratación osmótica de láminas de sardina, *Revista Científica FCV-LUZ*, **23**, 400-407 (2009)
9. BROOKER, D.B et al, Drying and storage of grains and oilseeds, Westport, 450 (1992)
10. DE LIMA A.G.B; NEBRA, S.A; QUEIROZ, M.R, Comunicado técnico: Aspectos científico e tecnológico da banana, *Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais*, **2**, 87-101 (2000)
11. QUEIROZ, M.R ; NEBRA, S.A, Theoretical and experimental analysis of the drying kinetics of bananas, *Journal of Food Engineering*, **47**, 127-132 (2001)